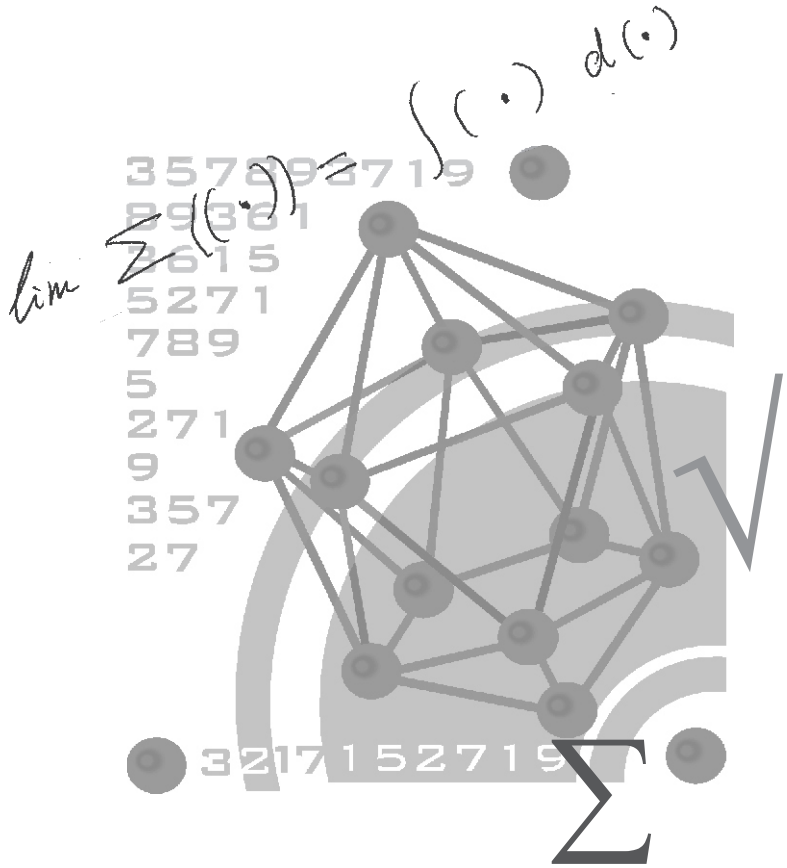
МЕТОДА МАТЕМАТИКИ

16



УДК 51:62

О.С. Гаврилів

ДО ЗВ'ЯЗКУ ТЕОРІЇ МНОЖИН З КОМБІНАТОРИКОЮ

Розглянемо множину X, яку опишемо перечисленням елементів, тобто $X = \{X_1, X_2, X_3, ..., X_n\}$. Нехай $X_i \neq X_j$, $i \neq j$.

Означення 1. Спосіб множення множини X на натуральне число k, при якому одержуємо множину з тими самими властивостями, що фіксуються при переході від способу задання множини перечисленням елементів до способу задання множини описуючою елементи множини властивістю, – називається множенням множини X на ціле число k варіанту α.

Теорема 1. При множенні множини X на натуральне число k у варіанті α одержується множина $(kX)_\alpha$ з елементами, кратними до елементів множини X.

Доведення. Припустимо, що множиною $(kX)_\alpha = \{kX_1, kX_2, ..., kX_n\}$, тобто додалася одна властивість, описуюча довільний $(kX_i) \in (kX)_\alpha$ – подільність на число k. Суперечність. Отже, $(kX)_\alpha \equiv \{X_1, X_2, .., X_n\}$ – тобто, множення множини X на ціле число k означає, що множина $(kX)_\alpha$ щодо k є однорідною нульового виміру [1].

Означення 2. Спосіб множення множини X на натуральне число k, при якому одержуємо множину з тими самими властивостями, що фіксуються при переході від способу задання множини перечисленням елементів до способу задання множини описуючою елементи множини властивістю плюс N додаткових властивостей, – називається множенням множини X на ціле число k варіанту $(\beta - N)$.

Теорема 2. При множенні множини X на число k натуральне одержується множина $(kX)_{\beta-n}$ з властивостями, характерними для однорідних функцій N-того виміру.

Доведення. Нехай, спершу, $N = 1$. Доводитимемо методом математичної індукції. Розглянемо $(kX)_{\beta-n} = (kX)_{\beta-1}$ у вигляді

$$(kX)_{\beta-1} = \{kX_1, kX_2, ..., kX_n\}_{\beta-1} = k\{X_1, X_2, ..., X_n\}.$$

Як відомо з теореми 1 $(kX)_{\beta-1}$ від X при фіксуванні множини $(kX)_{\beta-1}$ способом задання $(kX)_{\beta-1}$ описуючою елементи множини властивістю відрізняється на операцію скоротності на число k. З другого боку, якщо розглянути множину елементів матриці і помножити матрицю на число k, отримаємо множення всіх елементів матриці на це число k.

Властивість для випадку $N = 1$ з'ясовано, себто $(kX)_{\beta-N} = k\{X_1, X_2, ..., X_n\}$.

Нехай при $N = m$

$$(kX)_{\beta-N} = k^m\{X_1, X_2, ..., X_n\} = \{kX_1, kX_2, ..., kX_n\}_{\beta-m} = \{k^m X_1, k^m X_2, ..., k^m X_n\}.$$

Доведемо, що при $N = m + 1$

$$(kX)_{\beta-N} = k^{m+1}\{X_1, X_2, ..., X_n\} = \{kX_1, kX_2, ..., kX_n\}_{\beta-m-1}.$$

Дійсно,

$$(kX)_{\beta-N} = (kX)_{\beta-m-1} = \{kX_1, kX_2, ..., kX_n\}_{\beta-m-1} =$$
$$= \{k^N X_1, k^N X_2, ..., k^N X_n\} = k\{k^m X_1, k^m X_2, ..., k^m X_n\} = k(kX)_{\beta-m},$$

тобто, в порівнянні з $N = m$ виноситься k у випадку $N = m + 1$ у степені, на одиницю вищому.

Теорему доведено.

Аналогічні, до висновку теореми 2, властивості мають визначники і перманенти матриць [2].

Означення 3. Об'єднувальним множенням $\otimes$ множини X на ціле число k називається така операція, при якій елементи множини не змінюються, але число кожних різних елементів множини виростає в k разів.

Природньо, коли порожня множина $\emptyset$ профіксована елементом множини X, $X_j \equiv \emptyset$, елемент X_j також буде представлений в новій множині $k \otimes X$ рівно k разів, що стосується і пам'яті комп'ютера, при записуванні в яку множини відбувається реальне об'єднувальне множення множини на $k = +\infty$.

Аксіома. В множинах, одержаних шляхом об'єднувального множення, діє – при всіх операціях з підмножинами – комбінаторика з повтореннями [2, 3].

Позначимо $R^=$ – оператор розбиття натуральних чисел на рівні натуральні доданки, R – оператор розбиття натуральних чисел на натуральні доданки [3].

Теорема 3. У випадку множення множини $X \subset N$ натуральне число k у варіанті $(\beta - 1)$ існує взаємно однозначна відповідність між множиною $(kX)_{\beta-N}$ і множиною $k \otimes X$.

Доведення. Застосовуємо до множини $(kX)_{\beta-N}$ оператор $R^{=}$. Одержимо одним із результатів $k \otimes X$. Взаємопов'язуючи $R^{=}(kX)_{\beta-N}$ із $k \otimes X$ у випадку $N=1$ одержуємо доведення теореми.

Очевидно, теоремою 3 фіксується розуміння взаємозв'язку арифметичних операцій множення на натуральне число і кратного самододавання, за рахунок чого появляється кратне використовування чисел, тобто результуючою – в філософському сенсі – є множина вищої потужності яко сукупність вихідних елементів.

Наслідок 1. Результатом застосування оператора R до множини X є множина потужності вищої за множину X, якщо єдиним різним елементом $x_1 \in X$ не є $x_1 = 1$.

Доведення очевидне.

Наслідок 2. При розбитті множини X оператором розбиття $R^{=}{}_{\varphi}$ на рівні раціональні доданки $\varphi \in R$, $\varphi > 0$, одержується множина потужності не вище зчисленної потужності.

Доведення. Для одержання елементів множини $R^{=}{}_{\varphi}X$ необхідно множину X помножити на число φ у варіанті α. Число елементів або потужність множини $(\varphi X)_{\beta-1}$ підраховується аналогічно [3].

Наслідок 2 доведено.

Література

1. Кудрявцев Л.Д. Однородная функция. В кН. Математическая энциклопедия в 5-ти т. – М.: Советская энциклопедия. – Т.3, 1982. – 1183 с.
2. Кофман А. Введение в прикладную комбинаторику. – М.: Наука, 1975. – 480 с.
3. Виленкин Н.Я. Комбинаторика. – М.: Наука, 1969. – 328 с.
4. Биркгоф Г., Барти Т. Современная прикладная алгебра. – М.: Мир, 1976. – 400 с.

Т-во ім. Ст.Банаха
Надійшла 26.06.2007 р.

УДК 517.5

М. А. Сухорольський

ПРО БАЗИС У ПРОСТОРІ ФУНКЦІЙ, АНАЛІТИЧНИХ У ОДНОЗВ'ЯЗНІЙ ОБЛАСТІ

Біортогональні системи аналітичних функцій на замкнених кривих у однозв'язних областях комплексної площини задають базиси у відповідних просторах аналітичних функцій. У роботах [3-5,8] розглянуто властивості біортогональних систем функцій та досліджено умови розвинення аналітичних функцій у ряди за цими системами. Розвинення функцій у ряди за системами многочленів (Фабера, Бернуллі, Ейлера та інших) досліджено з використанням контурного інтегрування та конформних перетворень у роботах [1,3-6,9].

У даній роботі побудовано системи біортогональних функцій з використанням конформних відображень однозв'язних областях на круг. Досліджено умови розвинення аналітичних функцій у заданих областях за цими системами.

1. Біортогональні системи функцій. Нехай:

$$w = \varphi(z) = \varphi_0(z - z_0) \tag{1}$$

- конформне відображення однозв'язної області D розширеної комплексної площини z на круг $K: |w| < 1$ комплексної площини w; $\varphi(z_0) = 0$; $\varphi'(z_0) = 1$; $z = h(w)$ - обернене відображення; границя $L = \partial D$ відображається на коло $C: |w| = 1$.

Система функцій $\{w^n\}_{n=0}^{\infty}$ і спряжена (асоційована) до неї система $\{1/w^{m+1}\}_{m=0}^{\infty}$ - біортогональні на замкненому контурі,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{w^n}{w^{m+1}}dw = \delta_{nm}, \tag{2}$$

де $C_r: |w| = r,\ 0 < r < 1$. При цьому система $\{w^n\}$ - базис у розумінні [4] в просторі функцій, аналітичних у крузі $K: |w| < 1$, а система $\{1/w^{m+1}\}$ - базис у просторі функцій, аналітичних зовні круга $\overline{K}$.

Підставляючи вираз перетворення $w = \varphi(z)$ в умову біортогональності (2), одержимо такі два співвідношення:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_r}\varphi^n(z)\frac{\varphi'(z)}{\varphi^{m+1}(z)}dz=\delta_{nm};\qquad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_r}\frac{d}{dz}\frac{\varphi^{n+1}(z)}{n+1}\frac{1}{\varphi^{m+1}(z)}dz=\delta_{nm}, \tag{3}$$

де $L_r\subset D$ - прообраз кола C_r (замкнена крива) при відображенні (1).

Введемо системи функцій

$$\left\{g_n(z)=\varphi^n(z)\right\}_{n=0}^{\infty},\ \left\{g_n^*(z)=\frac{1}{n+1}\frac{d}{dz}\varphi^{n+1}(z)\right\}_{n=0}^{\infty},\ z\in D. \tag{4}$$

Функції $g_n(z)$ і $g_n^*(z)$ аналітичні в околі точки z_0, внаслідок аналітичності функції $\varphi(z)$ в D, і їх розвинення у ряди Тейлора не містять членів з від'ємними степенями змінної $z-z_0$. Тому відповідні спряжені до (4) системи функцій $\{\omega_m(z-z_0)\}_{m=0}^{\infty}$, $\{\omega_m^*(z-z_0)\}_{m=0}^{\infty}$ згідно з (3) можна задати головними частинами рядів Лорана в околі точки z_0 функцій $\varphi'(z)\varphi^{-(m+1)}(z)=\omega_m(z-z_0)+g_m(z-z_0)$, $\varphi^{-(m+1)}(z)=\omega_m^*(z-z_0)+g_m^*(z-z_0)$, де $g^*(z-z_0)$, $g_m^*(z-z_0)$ - правильні частини розвинень цих функцій.

Теорема 1. Нехай $w=\varphi(z)$ - конформне відображення (1) і $|z-z_0|<l$ - найбільший круг, в якому збігається ряд Тейлора цієї функції і який лежить в області D. Тоді системи функцій (4) базиси у просторі E_r, $0<r<l$, функцій, аналітичних в крузі $|z-z_0|<r$.

Доведення. Розглянемо функцію $F(\xi)=\dfrac{1}{\varphi_0(l/\xi)}$, де $\xi=z-z_0$. Вона однолиста в області $|\xi|>l$ і задовольняє умови $F(\infty)=\infty$, $\lim\limits_{z\to\infty}F(\xi)/\xi=1$. Нехай $\psi(\xi)$ - також однолиста функція в області $|\xi|>l$ і $\psi(\infty)=1$. Тоді за теоремою 10 [4] система поліномів $\{p_n(\xi)\}_{n=0}^{\infty}$ - базис у просторі E_r, $r>l$, де $p_n(\xi)$ - головні частини рядів Лорана функцій $\dfrac{F^n(\xi)F'(\xi)}{\psi(\xi)}$ в околі нескінченно віддаленої точки. Спряженими до цих поліномів є функції $\widetilde{\omega}_m(\xi)=\dfrac{\psi(\xi)}{F^{m+1}(\xi)}$, $m=0,1,\ldots$. Також, система функцій $\{\widetilde{\omega}_m(\xi)\}_{m=0}^{\infty}$ - базис у просторі $\widetilde{E}_\rho$ функцій, аналітичних в області $|\xi|>\rho,\ \rho\ge l$, і рівних нулеві у нескінченно віддаленій точці, а $\{p_n(\xi)\}_{n=0}^{\infty}$ - спряжена до неї система функцій.

Умова біортогональності наступна

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\xi|=r'\ge r}p_n(\xi)\widetilde{\omega}_m(\xi)d\xi=\delta_{nm}$$

Перетворимо цю умову з використанням відображення $\xi=l/(z-z_0)$, одержимо

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma^+}\widetilde{\omega}_m\left(\frac{l}{z-z_0}\right)p_n\left(\frac{l}{z-z_0}\right)\frac{ldz}{(z-z_0)^2}=\delta_{nm}. \tag{5}$$

Тут $\Gamma^+:|z-z_0|=l/r'$ - коло, орієнтоване проти годинникової стрілки.

Система функції $\left\{\dfrac{\widetilde{\omega}_m(l/z-z_0)}{z-z_0}\right\}$ - базис в просторі функцій, аналітичних в крузі $|z-z_0|<l$, і $\left\{\dfrac{lp_n(l/(z-z_0))}{z-z_0}\right\}$ - спряжена до неї система многочленів за від'ємними степенями змінної,

$$\frac{\widetilde{\omega}_m(l/(z-z_0))}{z-z_0}=\frac{\psi(l/(z-z_0))}{zF^{m+1}(l/(z-z_0))}=\varphi^m(z)\frac{\varphi(z)\psi(l/(z-z_0))}{z};$$

$$\frac{lp_n(l/(z-z_0))}{z-z_0}=\Gamma\left[\frac{lF^n(l/(z-z_0))}{z-z_0}\frac{F'(l/(z-z_0))}{\psi(l/(z-z_0))}\right]=\Gamma\left[\frac{\varphi'(z)}{\varphi^{n+1}(z)}\frac{z-z_0}{\varphi(z)\psi(l/(z-z_0))}\right], \qquad (6)$$

де $F'(\xi)=F'(l/(z-z_0))=\dfrac{(z-z_0)^2\varphi'(z)}{l\varphi^2(z)}$; $\Gamma[g(z)]$ - головна частина ряду Лорана функції $g(z)$ в околі точки z_0.

Якщо вибрати $\psi(l/(z-z_0))=\dfrac{z-z_0}{\varphi(z)}$ і $\psi(l/(z-z_0))=\dfrac{(z-z_0)\varphi'(z)}{\varphi(z)}$, то з (5) отримаємо умови біортогональності для першої та другої систем функцій (4) і відповідні до них спряжені системи функцій:

$$\omega_n(z-z_0)=\frac{lp_n(l/(z-z_0))}{z-z_0}=\Gamma\left[\frac{\varphi'(z)}{\varphi^{n+1}(z)}\frac{z-z_0}{\varphi(z)\psi(l/(z-z_0))}\right]=\Gamma\left[\frac{\varphi'(z)}{\varphi^{n+1}(z)}\right];$$

$$\omega_n^*(z-z_0)=\frac{lp_n(l/(z-z_0))}{z-z_0}=\Gamma\left[\frac{\varphi'(z)}{\varphi^{n+1}(z)}\frac{z-z_0}{\varphi(z)\psi(l/(z-z_0))}\right]=\Gamma\left[\frac{1}{\varphi^{n+1}(z)}\right]. \qquad (7)$$

Отже, якщо функція $f(z)$ аналітична в крузі $|z-z_0|<l$, то вона розвивається в середині цього круга у рівномірно збіжні ряди за системами (4),

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_ng_n(z),\ f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_ng_n(z),\ |z-z_0|\le r<l, \qquad (8)$$

де $a_n=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|\xi-z_0|=r'\le r}f(\xi)\omega_n(\xi-z_0)d\xi$; $b_n=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|\xi-z_0|=r'\le r}f(\xi)\omega_n^*(\xi-z_0)d\xi$.

Теорема 2. Системи функцій (4) - базиси у просторі функцій, аналітичних в області D.

Доведення. Покажемо, що ряди (8) рівномірно збігаються в будь-якій області $\overline{D}'\subset D$, якщо функція $f(z)$ аналітична в D. Оскільки (1) відображує область D на одиничний круг, то будь-яка точка $z\in\overline{D}'$ лежить на лінії L_ρ, яка є прообразом кола $|w|=\rho<1$. Тоді маємо оцінки для функцій систем (4)

$$|g_n(z)|=|\varphi(z)|^n=\rho^n,\ |g_n^*(z)|=|\varphi(z)|^n|\varphi'(z)|\le A_\varphi\rho^n,\ z\in L_\rho, \qquad (9)$$

де $A_\varphi=\max\limits_{z\in L_\rho}|\varphi'(z)|$.

Нехай L_{ρ_0} - прообраз кола $|w|=\rho_0$, $\rho<\rho_0<1$, $F=\max\limits_{z\in L_{\rho_0}}|f(z)|$, $A_\psi=\max\limits_{|w|=\rho_0}|h'(w)|$.

Перетворимо вирази для коефіцієнтів рядів (7) з урахуванням рівності нулю інтеграла по контуру $L_{\rho_0}\subset D$ від аналітичної функції в області D,

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=L_{\rho_0}}f(\xi)\omega_n(\xi-z_0)d\xi=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=L_{\rho_0}}\frac{f(\xi)\varphi'(\xi)d\xi}{\varphi^{n+1}(\xi)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=\rho_0}\frac{f(h(w))dw}{w^{n+1}},$$

$$b_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=L_{\rho_0}}f(\xi)\omega_n^*(\xi-z_0)d\xi=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=L_{\rho_0}}\frac{f(\xi)d\xi}{\varphi^{n+1}(\xi)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=\rho_0}\frac{f(h(w))h'(w)dw}{w^{n+1}},$$

і знайдемо оцінки:

$$|a_n|\le\frac{1}{2\pi}\int_{|w|=\rho_0}\frac{|f(h(w))||dw|}{|w|^{n+1}}\le\frac{F}{\rho_0^n};\ |b_n|\le\frac{1}{2\pi}\int_{|w|=\rho_0}\frac{|f(h(w))||h'(w)||dw|}{|w|^{n+1}}\le\frac{FA_\psi}{\rho_0^n}. \qquad (10)$$

Оцінивши суми рядів (8) з урахуванням оцінок (9), (10) і нерівності $\rho<\rho_0$, переконаємося у рівномірній їх збіжності в області $\overline{D}'\subset D$,

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n||g_n(z)| \le F\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n = \frac{F\rho_0}{\rho_0-\rho},\ \sum_{n=0}^{\infty}|b_n|\left|g_n^*(z)\right| \le FA_\psi\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n = \frac{FA_\psi\rho_0}{\rho_0-\rho},$$

і, відповідно, аналітичності сум рядів в цій області. Оскільки круг $|z|<l$ належить області D, суми рядів (8) визначають аналітичну функцію $f(z)$ в цій області.

Приклад 1. Нехай область D – півплощина $\operatorname{Im} z>0$. Конформне відображення області D на одиничний круг $K:|w|<1$ і обернене до нього відображення задаються функціями [2]

$$w = i\frac{2z-i}{2z+i}, \qquad z = \frac{i}{2}\frac{i+w}{i-w}. \tag{11}$$

При цьому, точкам $z=\pm 1/2,\ z=0,\ z=\infty$ відповідають точки $w=\pm 1,\ w=-i,\ w=i$, а границя $L=\partial D$, якою є вісь Oy, відображується в коло $C:|w|=1$.

Введемо відповідно з першим співвідношенням (3) систему функцій

$$\left\{ g_n(z) = i^n\left(\frac{2z-i}{2z+i}\right)^n \right\}_{n=0}^{\infty},\ z\in D. \tag{12}$$

Функції $g_n(z)$ аналітичні в околі точки $z_0=i/2$. Функції $\varphi'(z)/\varphi^{m+1}(z)=$ $=4i^{m-1}(2z+i)^{m-1}/(2z-i)^{m+1}$ мають в цій точці полюси порядку $m+1$.

Спочатку, знайдемо розвинення функції $g_n(z)$ у ряд Маклорена, який збігається у крузі $|z|<1/2$, що належить області D,

$$g_0(z)=1,\ g_n(z)=i^n\left(\frac{z-i/2}{z+i/2}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} i^k C_{n+k-1}^k\left(z-\frac{i}{2}\right)^{n+k},\ n\ge 1. \tag{13}$$

Тепер, побудуємо спряжену до (12) і (13) систему функцій. Спочатку, знайдемо розвинення функції $\varphi'(z)/\varphi^{m+1}(z)=4i^{-m+1}(2z+i)^{m-1}/(2z-i)^{m+1}$ в ряд Лорана в околі точки $z=i/2$,

$$\frac{4i^{-m+1}(2z+i)^{m-1}}{(2z-i)^{m+1}} = \frac{i^{-m+1}(z+i/2)^{m-1}}{(z-i/2)^{m+1}} = \left(z-\frac{i}{2}\right)^{-(m+1)}\sum_{k=0}^{m-1}C_{m-1}^k i^{k-m+1}\left(z-\frac{i}{2}\right)^{m-1-k} =$$

$$\sum_{k=0}^{m-1}C_{m-1}^k i^{k-m+1}\left(z-\frac{i}{2}\right)^{-k-2}.$$

Звідси знайдемо головну частину ряду Лорана цієї функції (многочлен за від'ємними степенями змінної)

$$\omega_0(z)=\left(z-\frac{i}{2}\right)^{-1},\ \omega_m(z)=\frac{i^{-m+1}(z+i/2)^{m-1}}{(z-i/2)^{m+1}} = \sum_{k=0}^{m-1}C_{m-1}^k i^{k-m+1}\left(z-\frac{i}{2}\right)^{-k-2},\ m\ge 1. \tag{14}$$

Системи функцій (13) і (14) біортогональні на довільному колі $L:\ |z-i/2|=r,\ 0<r<1/2$. За теоремою 1 система сум рядів (13) є базисом у просторі функцій, аналітичних в крузі $|z-i/2|<1/2$, $0<r<\pi/4$, а за теоремою 2 система (12) – базис у просторі функцій, аналітичних у півплощині $\operatorname{Im} z>0$.

Враховуючи, що сума ряду

$$\sum_{m=0}^{\infty} g_m(z)\omega_m(t) = \frac{2}{2t-i} + 4i\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{2z-i}{2z+i}\right)^m\frac{(2t+i)^{m-1}}{(2t-i)^{m+1}} =$$

$$= \frac{2}{2t-i} + 4i\left(\frac{2z-i}{2z+i}\right)\frac{1}{(2t-i)^2}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{2z-i}{2z+i}\right)^m\left(\frac{2t+i}{2t-i}\right)^m = \frac{2}{2t-i} + \frac{1}{(2t-i)}\frac{2z-i}{t-z} = \frac{1}{t-z}$$

рівномірно збігається за змінною z в області D_r з границею L_r (прообразом кола $|w| = r, 0 < r \le 1$) для будь-яких $t \in L_r$, одержимо для аналітичної у півплощині $\operatorname{Im} z > 0$ функції розвинення

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_r} \frac{f(t)dt}{t-z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n g_n(z),$$

де $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_r} f(t)\omega_n(t)dt$.

Приклад 2. Якщо на осі Ox задана дійсна частина аналітичної у півплощині функції, то за формулою Шварца [2] маємо

$$f(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(t)dt}{t-z} + Ci, \tag{15}$$

де C - дійсна стала; $u(t)$ - кусково-неперервна функція, $u(t) = o\left(1/|t|^{\alpha}\right)$, якщо $|t| \to \infty$, $\alpha > 0$.

Тоді для коефіцієнтів розвинення функції $f(z)$ за системою $\{g_n(z)\}$ одержимо формули

$$a_0 = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\omega_0(t)dt, \; a_n = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\omega_n(t)dt. \tag{16}$$

Зокрема, якщо функція дорівнює одиниці на відрізку $(a; b)$ дійсної осі, а на решти осі дорівнює нулеві, то

$$f(z) = \frac{1}{\pi i} \int_a^b \frac{dt}{t-z} + Ci = \frac{1}{\pi i} \ln \frac{b-z}{a-z} + Ci = \sum_{n=0}^{\infty} a_n g_n(z),$$

де $a_0 = \frac{1}{\pi i} \int_a^b \omega_0(t)dt + Ci = \frac{1}{\pi i} \int_a^b \frac{dt}{t - i/2} + Ci = \frac{1}{\pi i} \ln \frac{b - i/2}{a - i/2} + Ci$,

$$a_n = \frac{1}{\pi i} \int_a^b \omega_n(t)dt = \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{(t+i/2)^{n-1}}{(t-i/2)^{n+1}} dt = \frac{-1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} (k+2) C_{n-1}^k i^k \frac{1}{(t-i/2)^{k+3}} \Bigg|_a^b.$$

Приклад 3. Знайдемо розвинення за системою (12) функції $f(z)$, аналітичної у півплощині $\operatorname{Im} z > 0$, дійсна частина якої на дійсній осі приймає значення $u(t) = 1/\left(t^2 + h^2\right)$. За формулами (15) і (16) знайдемо вираз функції і коефіцієнти розвинення

$$f(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(t)dt}{t-z} = -2 \sum_{\operatorname{Im} t_k < 0} \underset{t=t_k}{res} \frac{u(t)}{t-z} = -2 \underset{t=-hi}{res} \frac{1}{\left(t^2+h^2\right)(t-z)} = -\frac{1}{hi(z+hi)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n g_n(z),$$

де $a_0 = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(t^2+h^2\right)(z-i/2)} dz = -2 \underset{z=-hi}{res} \frac{1}{\left(t^2+h^2\right)(z-i/2)} = \frac{1}{h(h+1/2)}$;

$$a_n = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(t^2+h^2\right)} \frac{i^{-n+1}(t+i/2)^{n-1}}{(t-i/2)^{n+1}} dt = -2 \underset{z=-hi}{res} \frac{1}{\left(h^2+t^2\right)} \frac{i^{-n+1}(t+i/2)^{n-1}}{(t-i/2)^{n+1}} = \frac{-i^{-n}(h-1/2)^{n-1}}{h(h+1/2)^{n+1}}.$$

Отже,

$$f(z) = -\frac{1}{hi(z+hi)} = \frac{1}{h(h+1/2)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(h-1/2)^{n-1}}{h(h+1/2)^{n+1}} \left(\frac{2z-i}{2z+i}\right)^n.$$

Якщо $h = 1/2$, то $f(z) = -\frac{2}{i(z+i/2)} = 2g_0(z) + 2ig_1(z)$.

Наведений у прикладі 3 результат, якщо вважати параметр h близьким до нуля, відповідає розв'язку задачі з граничною імпульсною функцією.

Висновки. Проведені у роботі викладки не висвітлюють властивостей та асимптотичних оцінок відповідних послідовностей функцій. Методика одержання оцінок для окремих класів послідовностей функцій наведена у цитованих роботах**.**

Розвинення функцій за системами біортогональних функцій можуть бути використані для побудови розв'язків рівнянь з частинними похідними крайових задач за методикою викладеною у роботах [7,8].

Література

1. Дзядык В.К. Введение в теорию приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977. – 512 с.
2. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. - М.: Наука, 1987. – 698 с.
3. Леонтьев А.Ф. Последовательности полиномов из экспонент. М.: Наука, 1980. - 384 с.
4. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. Том 2. – М.: Наука, 1968. -624с.
5. Смирнов В. И., Лебедев Н. А. Конструктивная теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1064. -440 с.
6. Сухорольський М.А. Розвинення аналітичних функцій за системами поліномів типу Мелліна / Вісник національного університету «Львівська політехніка». Серія фізико-математичні науки. – 2005. - № 346. – С. 111 – 115.
7. Сухорольський М. А. Аналітичні розв'язки рівняння Гельмгольца. //Математичні проблеми механіки неоднорідних структур /Під заг. ред. І.О.Луковського, Г.С.Кіта, Р.М.Кушніра. – Львів: ІППММ НАН України, 2014. – С. 160-163.
8. Сухорольський М. А., Достойна В. В. Один клас біортогональних систем функцій, які виникають при розв'язанні рівняння Гельмгольца у циліндричній системі координат // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2012. – **55,** № 2. – С. 52–62.
9. Сухорольський М.А. Розвинення функцій за системою поліномів, біортогональних на замкненому контурі з системою регулярних у нескінченно віддаленій точці функцій // Укр. мат. журн. – 2010. – 62, № 2. – С. 238-254.

Національний університет
«Львівська політехніка»

Надійшла 25.08.2015 р.

УДК 519.6

О.С. Гаврилів

ДО АЛГОРИТМУ ПОБУДОВИ РОЗВ'ЯЗКІВ ДЕЯКИХ НЕОДНОРІДНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ В ЧАСТКОВИХ ПОХІДНИХ

This paper is dedicated to solve problem of construction the solve of some nonhamogenous differential equations in part derivations.

Зауважимо, що диференціальні рівняння в часткових похідних зі сталими коефіцієнтами є нескладно інтегрованими шляхом використання інтегральних перетворень [1, 3]

1. Розглянемо диференціальне рівняння в часткових похідних [2] вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\varphi(x)\frac{\partial u}{\partial y}=\psi(x), \tag{1}$$

де $u=u(x,y)$; $u\in R^1$, $\varphi(x)\in R^1$, $\psi(x)\in R^1$; $(x,y)\in R^2$.

Оскільки $\cos$-перетворення Фур'є від похідної непарного порядку дає трансформенту $\sin$-перетворення Фурє і навпаки – застосовуватимемо до рівняння (1) інтегральне перетворення Лапласа по незалежній змінній y, для чого виходимо зі звуження області допустимих значень по y із $y\in R^1$ до $y\geq 0$.

Для випадку $y<0$ схема розв'язування з використанням перетворення Лапласа годиться після заміни $y=-t$, $t>0$.

Вимагатимемо від $u(x,y)$ виконання умови

$$\int_0^t u(x,y)dy=o\left(e^{\sigma_0 t}\right)$$

для деякого $\sigma_0>0$.

Діємо на обидві частини рівняння (1) інтегральним перетворенням Лапласа-Карсона [3], себто

$$\tilde{u}=p\int_0^\infty e^{-py}u(x,y)dy. \tag{2}$$

Звідси

$$\frac{d\tilde{u}}{dx}+\varphi(x)\left(p\tilde{u}(x,p)-u(x,0)\right)=\psi(x). \qquad (3)$$

Неоднорідне лінійне диференціальне рівняння розв'язуємо класично.

$$\frac{d\tilde{u}}{dx}+\varphi(x)\cdot p\tilde{u}(x,p)=\varphi(x)u(x,0)+\psi(x),\ \tilde{u}=w\cdot v,\ \frac{d\tilde{u}}{dx}=w\frac{dv}{dx}+v\frac{dw}{dx},$$

$$w\frac{dv}{dx}+v\frac{dw}{dx}+\varphi(x)\cdot p\cdot wv=\varphi(x)u(x,0)+\psi(x),$$

$$v\frac{dw}{dx}+\varphi(x)\cdot p\cdot wv=0;\ v\neq 0,\ \frac{dw}{dx}+\varphi(x)\cdot p\cdot w=0,\ \frac{dw}{w}=-\varphi(x)\cdot p\cdot dx,$$

$$\ln w=-\int\varphi(x)\cdot p\cdot dx,\ w=\exp\left\{-\int\varphi(x)\,p\,dx\right\},$$

$$e^{-p\int\varphi(x)dx}\frac{dv}{dx}=\varphi(x)\cdot u(x,0)+\psi(x),\ dv=\left(\varphi(x)\cdot u(x,0)+\psi(x)\right)e^{p\int\varphi(x)dx}dx,$$

$$v=\int\left(\varphi(x)\cdot u(x,0)+\psi(x)\right)e^{p\int\varphi(x)dx}dx,$$

$$\tilde{u}=e^{-p\int\varphi(x)dx}\int\left(\varphi(x)\cdot u(x,0)+\psi(x)\right)e^{p\int\varphi(x)dx}dx. \qquad (4)$$

Оригінал u по трансформанті $\tilde{u}$ знаходимо згідно таблиць [3] або безпосередньо реалізуючи обернене перетворення Лапласа.

Приклад 1. $\frac{\partial u}{\partial x}+\cos x\frac{\partial u}{\partial y}=\sin 2x$, $u(x,0)=x^2$

$\varphi(x)=\cos x$, $\psi(x)=\sin 2x$,

$$\tilde{u}=e^{-p\int\cos x dx}\int\left(\cos x\cdot x^2+\sin 2x\right)e^{p\int\cos x dx}dx=e^{-p\sin x}\int\left(x^2\cos x+\sin 2x\right)e^{p\sin x}dx. \qquad (5)$$

Перевіркою встановлюємо буквальне виконання рівняння

$$\frac{d\tilde{u}}{dx}+p\cos x\tilde{u}=x^2\cos x+\sin 2x,$$

яке є трансформантою вихідного рівняння.

Значення інтегралів в (5) відшукуємо з [4].

2. Розглянемо диференціальне рівняння порядку n в часткових похідних вигляду

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n}+\varphi(x)\frac{\partial^m u}{\partial y^m}+\sum_{k=0}^{l}a_k\frac{\partial^k u}{\partial y^{k_2}\partial x^{k_1}}=\psi(x), \qquad (6)$$

де $l<n$, $a_k=const$, $a_k\in R^1$, $k_1+k_2=k$, $\varphi(x)\in R^1$, $\psi(x)\in R^1$, $u(x,y)\in R^1$, $(x,y)\in R^2$, $y\geq 0$, $m<n$.

Діємо на (6) інтегральним перетворенням Лапласа-Корсона по незалежній змінній y.

Здобудемо

$$\frac{d^n\tilde{u}}{dx^n}+\varphi(x)\left(p^m\tilde{u}(x,p)-\sum_{s=0}^{m-1}\frac{u^{(s)}(x,0)}{p^{s-m}}\right)+\sum_{k=0}^{l}a_k\frac{d^{k_1}}{dx^{k_1}}\left(p^{k_2}\tilde{u}(x,p)-\sum_{s=0}^{k_2-1}\frac{u^{(s)}(x,0)}{p^{s-k_2}}\right)=\psi(x). \qquad (7)$$

Диференціальне рівняння (7) є лінійним диференціальним рівнянням n-ного порядку в звичайних похідних від невідомої трансформанти $\tilde{u}$ з одним змінним коефіцієнтом $\varphi(x)$.

Його розв'язуємо традиційно [5-8].

Для знаходження оригіналу $u(x,y)$ використовується обернене перетворення до трансформенти $u(x,p)$.

3. Розглянемо диференціальне рівняння порядку n в часткових похідних вигляду

$$\frac{\partial^n u}{\partial y^n}+\varphi(x)\frac{\partial^m u}{\partial y^m}+\sum_{k=0}^{l}a_k\frac{\partial^k u}{\partial y^{k_2}\partial x^{k_1}}=\psi(x), \qquad (8)$$

де $l<n$, $a_k=const$, $a_k\in R^1$, $k_1+k_2=k$, $\varphi(x)\in R^1$, $\psi(x)\in R^1$, $u(x,y)\in R^1$, $(x,y)\in R^2$, $y\geq 0$, $m<n$.

Застосуємо до обидвох частин (8) інтегральне перетворення Лапласа-Карсона по незалежній змінній y.

Добудемо

$$p^n\left(\tilde{u}-\sum_{s=0}^{n-1}\frac{u^{(s)}(x,0)}{p^s}\right)+\varphi(x)p^m\left(\tilde{u}-\sum_{s=0}^{m-1}\frac{u^{(s)}(x,0)}{p^s}\right)+\sum_{k=0}^{l}a_k\frac{d^{k_1}}{dx^{k_1}}\left(p^{k_2}\tilde{u}-\sum_{s=0}^{k_2-1}\frac{u^{(s)}(x,0)}{p^{s-k_2}}\right)=\psi(x). \qquad (9)$$

Рівняння (9) є вже рівнянням в звичайних похідних порядку $l<n$ і його розв'язок $\tilde{u}$ шукаємо аналогічно до пункту 2.

4. Розглянемо диференціальне рівняння порядку n в часткових похідних вигляду

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^r\partial y^t}+\varphi(x)\frac{\partial^m u}{\partial y^m}+\sum_{k=0}^{l}a_k\frac{\partial^k u}{\partial y^{k_2}\partial x^{k_1}}=\psi(x), \qquad (10)$$

де $l < n$, $r + t = n$, $k_1 + k_2 = k$, $a_k = const$, $a_k \in R^1$, $\varphi(x) \in R^1$, $\psi(x) \in R^1$, $u(x, y) \in R^1$, $(x, y) \in R^2$, $y > 0$, $m < n$.

Застосуванням до обидвох частин (10) інтегрального перетворення Лапласа-Корсона [3] по незалежній змінній y, одержимо

$$p^t \frac{d^r}{dx^r}\left(\widetilde{u} - \sum_{s=0}^{t-1} \frac{u^{(s)}(x,0)}{p^s}\right) + \varphi(x) p^m \left(\widetilde{u} - \sum_{s=0}^{m-1} \frac{u^{(s)}(x,0)}{p^s}\right) + \sum_{k=0}^{l} a_k \frac{d^{k_1}}{dx^{k_1}}\left(p^{k_2}\widetilde{u} - \sum_{s=0}^{k_2-1} \frac{u^{(s)}(x,0)}{p^{s-k_2}}\right) = \psi(x). \qquad (11)$$

Рівняння (11) є звичайним диференціальним рівнянням порядку $\max\{r, l\} < n$, його розв'язок $\widetilde{u}(x, p)$ знаходимо аналогічно до пунктів 2, 3.

Література

1. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1970. – 720 с.
2. Перестюк М.Д., Маринець В.В. Теорія рівнянь математичної фізики. – К.: Либідь, 1993. – 248 с.
3. Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. – М.: Наука, 1974. – 544 с.
4. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. – М.: Наука, 1973. – 228 с.
5. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1971. – 576 с.
6. Гаврилів О.С. Про один варіант побудови розв'язку лінійного диференціального рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами //Наук. конф. проф.-викл. складу ІМФН НУ «Львівська політехніка». – Львів, 2005. – С. 8.
7. Гаврилів О.С. Один аспект вирішності лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами // XI МНКФ ім. ак. М. Кравчука. – Київ, 2006. – С. 800.
8. Гаврилів О.С., Антонів Л.О. До питання побудови фундаментальних розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку із змінними коефіцієнтами // Технічні вісті, 2006/1(22), 2(23). – С. 52-54.

Т-во ім. Ст.Банаха
Надійшла 14.08.2008 р.

УДК 512

Новіков Л.О., Заярнюк П.М.

АПЛІКАТИВНА АЛГЕБРА МАТРИЦЬ ДОВІЛЬНОЇ ФОРМИ

Частина 1

Вступ. Упровадження матриць в математику є видатним винаходом, оскільки завдяки йому стало можливим подавати і в загальних рисах аналізувати як єдине ціле великого обсягу інформацію про об'єкти різної математичної природи.

Матричне числення у значній мірі є самодостатнім розділом математики, якому присвячено фундаментальні наукові праці теоретичного ([1], [2]) і прикладного ([3], [4], [5], [6]) характеру. Воно складає зміст навчальних посібників та підручників з лінійної алгебри, аналітичної та проективної геометрії ([7], [8], [9]). Матричне числення популяризують як елегантний, відносно простий, математично прозорий і зрозумілий аналітичний апарат придатний для опису та аналізу технічних, виробничих, економічних, природничих ситуацій і такий, що дозволяє «за деревами бачити ліс» і проводити числові розрахунки ([10], [11]). В нас викликає оптимізм запальність викладу і розкутість думки, якими наповнена книга Р. Беллмана ([3]) і маленький, що складається всього з трьох речень, §8, гл.2, цієї книги. Ми вирішили розвинути і назвати аплікативною алгебру матриць, про яку Р. Беллман у другому реченні згаданого §8, гл.2 говорить лише мимохідь. Ми солідарні з його тезою, висловленою у передмові до згаданої книги, що підставою для запроваджень нових понять повинна бути наявність задач, які **потрібно розв'язувати**, однак пам'ятаючи, що вино нового врожаю не наливають у старі міхи, пропонуємо нові моделі в теорії матриць.

Оскільки матричне числення вивчається у вишах, то тут ми обмежимось лише коротким нагадуванням основних понять.

1. Лінійний простір матриць типу $\tau(m, n)$.

Поки що розуміємо $m \times n$ – матрицю у класичному сенсі як сукупність $m \cdot n$ чисел з поля K – елементів матриці – записану у вигляді таблиці

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}. \qquad (0.1)$$

Таблиця (0.1) має m рядків, n стовпців, коротко записується як $\|a_{ij}\|$, $i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$ і зветься $m \times n$ – матрицею або ж матрицею типу $\tau(m, n)$. Кажуть також, що матриця (0.1) має розмір $m \times n$ (тут $m \times n$ читається: «ем на ен»). Матриці прийнято позначати великими літерами, а їх елементи – відповідними малими,

оснащеними індексами, літерами, так що (0.1) можна подати так $A = \|a_{ij}\|$. Матрицю, всі елементи якої рівні нулю, звемо нулем (нуль-матрицею) і позначаємо O.

1.1. Рівність двох матриць одного типу $A = \|a_{ij}\|$, $B = \|b_{ij}\|$ визначається так

$$A \overset{def}{=} B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}, \ \forall i, j .$$

тобто дві матриці рівні, якщо рівні всі елементи з однаковими індексами.

1.2. Додавання матриць. Нехай $A = \|a_{ij}\|$, $B = \|b_{ij}\|$ – матриці типу $\tau(m,n)$. Суму матриць $C = A + B$, матрицю $C = \|c_{ij}\|$ визначаємо співвідношенням

$$\|c_{ij}\| = \|a_{ij}\| + \|b_{ij}\| \overset{def}{=} \|a_{ij} + b_{ij}\| .$$

Отже дія додавання здійснюється поелементно: до матриці A «прикладаємо» матрицю B і відповідно елементи додаємо. Таку дію кваліфікуємо як **аплікативну**, розуміючи аплікацію як бієктивне відображення.

Операція додавання комутативна і асоціативна.

Операцію віднімання матриць визначаємо рівністю

$$\|a_{ij}\| - \|b_{ij}\| \overset{def}{=} \|a_{ij} - b_{ij}\| .$$

Зауважимо, що для кожної матриці $A = \|a_{ij}\|$ існує матриця $(-A) \overset{def}{=} \|-a_{ij}\|$, яка називається протилежною до A і задовольняє рівність $A + (-A) = 0$.

1.3. Множення матриці на число

Якщо λ – число і $A = \|a_{ij}\|$ – матриця типу $\tau(m,n)$, то добутком A на λ називається матриця, яка позначається λA і визначається рівністю

$$\lambda A \overset{def}{=} \|\lambda a_{ij}\| .$$

Операції додавання і множення на число звуться **лінійними** і мають властивості:

1) $A + B = B + A$; 2) $A + (B + C) = (A + B) + C$; 3) $A + 0 = A$;

4) $A + (-A) = 0$; 5) $1 \cdot A = A$; 6) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;

7) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$; 8) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$.

Тут A, B, C – матриці; α, β – числа.

1.4. Лінійна комбінація (ЛК) матриць

Нехай дано сукупність (систему) матриць типу $\tau(m,n)$

$$A_1, A_2, ..., A_s \tag{1}$$

і який-небудь набір чисел

$$x_1, x_2, ..., x_s . \tag{2}$$

Складемо матрицю

$$B = x_1 A_1 + x_2 A_2 + ... + x_s A_s . \tag{3}$$

Матриця B зветься ЛК матриць систем (1), а числа (2) – коефіцієнтами цієї ЛК. Якщо всі коефіцієнти ЛК нулі, то ЛК зветься **тривіальною** (лат. trivialis – очевидний), вона є нулем.

Означення. Система матриць одного і того самого типу зветься **лінійно залежною**, якщо існує нетривіальна ЛК елементів системи, яка рівна нулю.

Справедлива і має важливі наслідки наступна теорема.

Теорема. (Необхідні і достатні умови лінійної залежності). Система $m \times n$ – матриць лінійно залежна тоді і лише тоді, коли одна з матриць системи є ЛК інших.

Зазвичай цю теорему в посібниках формулюють і доводять для вектор-стовпців, але вона лишається справедливою, якщо слово «стовпець» замінити словом «матриця». Зауважимо, що доведення базується лише на означенні, тоді як безпосередня перевірка того, що дана матриця є ЛК інших призводить до необхідності розв'язувати для знаходження коефіцієнтів систему лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), що видно з представлення (3).

Приклад 1. Матриці

$$e_1^1 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad e_2^1 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad e_1^2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad e_2^2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \tag{4}$$

є лінійно незалежні. Тут індекси вгорі – не степені, а ідентифікатори місцеположення.

Теорема 1. Довільна 2×2 – матриця

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix} \tag{5}$$

єдиним чином представляється у вигляді ЛК матриць (4):

$$A = a_{11}e_1^1 + a_{12}e_2^1 + a_{21}e_1^2 + a_{22}e_2^2 . \tag{6}$$

Справедливість встановлюється перевіркою рівності (6). Матриці (4) є одним з базисів простору матриць типу $\tau(2,\,2)$.

Наслідок. Задання матриці (5) рівносильне заданню 4-вектора

$$\boldsymbol{a} = (a_{11},\, a_{12};\, a_{21},\, a_{22}). \tag{7}$$

Приклад 2. (Узагальнення прикладу 1). Запровадимо в розгляд $m \times n$ – матриці

$$e_j^i\,,\quad i = 1,2,...,m\,;\quad j = 1,2,...,n\,, \tag{8}$$

в яких елемент, що стоїть на перетині i -го рядка та j -го стовпця дорівнює 1, а решта елементів – нулі.

Очевидно, що справедливе узагальнення теореми 1.

Теорема 2. Будь-яка $m \times n$ – матриця $A = \|a_{ij}\|$ розвивається єдиним чином в ЛК матриць системи (8)

$$A = \|a_{ij}\| = \sum_{i1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, e_j^i\ . \tag{9}$$

Наслідок. Система mn матриць (8) є базисом лінійного простору матриць типу $\tau(m,n)$.

2. Інформаційний шнур (корд) матриці. Матриці різноманітних форм

З представлення (9) випливає **твердження**: задання $m \times n$ – матриці рівносильне заданню mn – вимірного вектора

$$\boldsymbol{a} = (a_{11},...,a_{1n};\, a_{21},...,a_{2n};...;a_{m1},a_{m2},...,a_{mn}). \tag{10}$$

Матриця $A = \|a_{ij}\|$ є об'єктом інформації і тому однозначно зіставлений з нею вектор $\boldsymbol{a}$ будемо називати **інформаційним шнуром (вервечкою)** або **кордом** матриці A і позначати символом $CordA$.

Отже для $m \times n$ – матриці A корд має вигляд:

$$CordA = (a_{11},a_{12},...,a_{1n};\, a_{21},a_{22},...,a_{2n};...;a_{m1},a_{m2},...,a_{mn}). \tag{11}$$

З виразу (11) для корду бачимо, що він складається з m сегментів (ланок), відділених крапкою з комою. Кожному сегменту відповідає рядок довжини n, а тому, за означенням, довжина сегмента – це кількість елементів, з яких він складений. Корд визначає структуру матриці, оскільки справедлива така теорема.

Теорема. З кожною $m \times n$ – матрицею однозначно зіставляється її інформаційний шнур (корд) і, навпаки, з кожним кордом однозначно зіставляється матриця типу $\tau(m,n)$.

Очевидним є також **твердження**: якщо $A = \|a_{ij}\|$, $B = \|b_{ij}\|$ – матриці типу $\tau(m,n)$,то

$$Cord(A+B) = CordA + CordB,$$

де сума кордів розуміється у аплікативному сенсі.

Зрозуміло також, що

$$Cord(\lambda A) = \lambda CordA,\ \lambda \text{ – число.}$$

Виникає ідея: задаючи корди, складені із сегментів **різної** довжини, ми можемо зіставити з ними матриці відповідних до них форм. Реалізуємо цю ідею, результати реалізації зобразимо на рисунку, на якому елементи матриці зображаються масними кружечками, а самі схеми матриць обведені рамками відповідної форми.

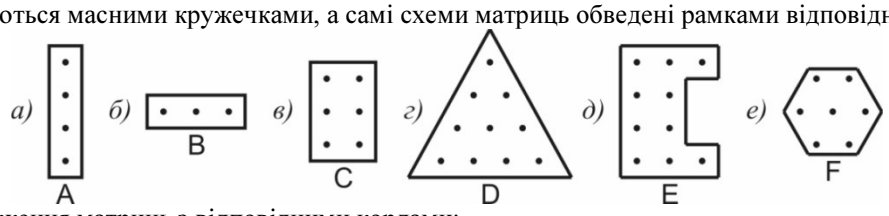


Рис. Зображення матриць з відповідними кордами:

а) $CordA = (a_1;a_2;a_3;a_4)$; б) $CordB = (b_1,b_2,b_3)$; в) $CordC = (c_{11},c_{12};c_{21},c_{22};c_{31},c_{32})$;

г) $CordD = (d_{11};d_{21},d_{22};d_{31},d_{32},d_{33};d_{41},d_{42},d_{43},d_{44})$;

д) $CordE = (e_{11},e_{12},e_{13};e_{21},e_{22};e_{31},e_{32};e_{41},e_{42},e_{43})$;

е) $CordF = (f_{11},f_{12};f_{21},f_{22},f_{23};f_{31},f_{32})$.

Кожний сегмент корду є кортеж певної довжини. Корд визначається кількістю своїх сегментів, їх довжиною, а також порядком їх розташування.

Тепер під матрицею в широкому сенсі розуміємо скінченну, певним чином впорядковану множину елементів, спосіб впорядкування якої визначає її корд.

Означення. Якщо $CordA = CordB$, то матриці (множини) A та B називаються **еквівалентними в інформаційному сенсі**.

Еквівалентність A та B подається записом:

$$A \sim B .$$

Означення. Якщо корди двох матриць мають однакову будову, то кажемо, що ці матриці мають однаковий тип.

Операція додавання визначається, очевидно, для матриць, які мають один і той самий тип.

Висновок. Запровадивши поняття корду, ми звільняємо себе від необхідності розглядати матриці лише у вигляді прямокутних таблиць.

Література

1. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука. 1985. – 552 с.
2. Ланкастер П. (Lancaster P.) Теория матриц, перев.. с англ.. М.: Наука, 1978. – 280 с.
3.Беллман Р. (Bellman, Richard). Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1976. – 352 с.
4. Фаддев Д.К. и Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М.-Л.: Физматгиз, 1963. – 734 с.
5. Гирко В.Л. Случайные матрицы. Киев, Вища школа. Изд-во при Киев. ун-те, 1975.
6. Гирко В.Л. Теория случайных детерминантом. Киев, Вища школа. Изд-во при Киев. ун-те, 1980. – 368 с.
7. Шилов Г.Е. Математический анализ (конечномерные линейные пространства). М.: Наука, 1969. – 432 с.
8. Тышкевич Р.И., Феденко А.С. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Минск, Вышэйшая школа, 1968. – 504 с.
9. Бэр Р. Линейная алгебра и проективная геометрия. Перев. С англ. М.: ИЛ, 1955. – 400 с.
10. Гильберт А. (Hilbert, Alfred). Как работать с матрицами. Перев. С нем. М.: Статистика, 1981. – 158 с.
11. Голуб, Дж. Х. и др. Матричные вычисления. М.: Мир, 1999. – 548 с.

Національний університет
«Львівська політехніка»
Новіков Леонід Олександрович
Заярнюк Павло Михайлович

Надійшла 25.03.2015 р.

УДК 517

Чабан В.Й.

ПРО ДВІ ТЕОРЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ

Реферат. Пропонується нова теорема дифе–ренціального числення, яка має безпосереднє за–стосування в теоретичній фізиці при роботі з кіне–тичною і потенціальною енергіями як вихідними по–няттями принципу найменшої дії. Теорема дає можливість другу похідну функції виразити через її перші похідні за арґументом і за функцією. Дано векторний варіант теореми.

Ключові слова: диференціальне числення, зв'язок між першими й другими похідними прямих і обернених функцій, векторний варіант.

Пропонується нова теореми диференціального численяя, яка має безпосереднє застосування в теоретичній фізиці при розв'язанні практичних задач застосування принципу найменшої дії, зокрема в розділі варіаційного числення. Завдяки цій теоремі вдалося значно спростити процес одержання нелінійних диференціальних рівнянь вектор-потен–ціала в нелінійному анізотропному середовищі, не звертаючись до стандартних складних побудов все того ж варіаційного числення

1. Вихідна теорема про другу похідну. *Друга похідна неперервної прямої функції дорівнює зі знаком мінус добутку її першої похідної в кубі на другу похідну оберненої функції.*

Доведення.

Нехай ми маємо дві неперервні функції, пряму й обернену до неї

$$y = y(x); \qquad x = x(y), \tag{1}$$

і відповідні їм перші й другі похідні за власними аргументами

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy(x)}{dx}; \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y(x)}{dx^2}; \\ \frac{dx}{dy} &= \frac{dx(y)}{dy}, \qquad \frac{d^2x}{dy^2} = \frac{dx^2(y)}{dy^2}, \end{aligned} \tag{2}$$

Записавши умовно, що $y=(x)^{-1}$; $x=(y)^{-1}$, похідні (2) приймають вигляд

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{x^2};\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2}{x^3};$$
$$\frac{dx}{dy}=-\frac{1}{y^2},\qquad \frac{d^2x}{dy^2}=\frac{2}{y^3}. \tag{3}$$

На підставі (3) одержуємо

$$\frac{d^2y}{dx^2}:\frac{d^2x}{dy^2}=\left(\frac{y}{x}\right)^3=\left(\frac{1}{x^2}\right)^3=-\left(\frac{dy}{dx}\right)^3. \tag{4}$$

Виходячи з (4), одержуємо відомий результат [1], який треба було довести

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\left(\frac{dy}{dx}\right)^3\frac{d^2x}{dy^2}. \tag{5}$$

Задля цікавости в такий самий спосіб можна по–казати очевидне, що

$$\frac{dy}{dx}=\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\frac{dx}{dy}. \tag{6}$$

1. Нова теорема про другу похідну. *Друга похідна неперервної функції дорівнює добутку її першої похідної і першої похідної не за аргументом, а за функцією від тієї самої першої похідної.*

Доведення.

Візьмемо першу похідну за функцією від першої похідної функції за аргументом

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dy}\left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1}=-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\frac{d^2x}{dy^2}. \tag{7}$$

Помноживши ліву й праву частини (7) на першу похідну dy/dx, одержимо

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{d}{dy}\left(\frac{dy}{dx}\right)=-\left(\frac{dy}{dx}\right)^3\frac{d^2x}{dy^2}. \tag{8}$$

Якщо тепер взяти до уваги (5), то одержимо ре–зультат, який треба було довести

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{d}{dy}\left(\frac{dy}{dx}\right). \tag{9}$$

Заглянемо наперед і запишемо векторний варіант обох формул і (5), і (9)

$$\frac{\partial^2\mathbf{F}}{\partial t^2}=-\left(\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial t}\right)^3\frac{\partial^2 t}{\partial\mathbf{F}^2};\quad \nabla\times\nabla\times\mathbf{F}=(\nabla\times\mathbf{F})\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{F}}\nabla\times\mathbf{F}\right). \tag{10}$$

Висновки.

1. Якщо перші похідні прямої і оберненої функ–цій також взаємо обернені, то їхні другі похідні по–в'язані коефіцієнтом, що дорівнює першій похідній прямої функції в кубі.

2. Другу похідну функції можна виразити як добуток першої похідної і похідної від неї не за арґу–ментом, а за функцією.

Abstract. The new theorem of differential calculation, that have direct application in theoretical physics during work with kinetic and potential energies as initial concepts of principle of the least action, is offered. The theorem gives an opportunity to express the second derivative of function through her first derivatives over argument and over function. The vector variant of both theorems is given.

Key of words: differential calculation, connection between the first and second derivatives of direct and reverse functions, vector variant.

Література

[1]. Чабан В. Числові методи. – Львів, 2001, 180 с.

[2]. Чабан В. Математичне моделювання в електро–техніці. – Л.: Вид-во Т. Сороки, 2010, 508 с.

Національний університет
«Львівська політехніка»
Надійшла 02.09.2015 р.

МЕТОДИКА

УДК 512.8+516.0

О.С. Столярчук

ДО РІВНЯННЯ ТРИКУТНИКА

Найпростішим із багатокутників є трикутник, і рівняння будь-якого багатокутника є розвиненням рівняння трикутника.

Будемо розрізняти трикутник як фігуру – і трикутник, як внутрішність трикутника.

Механіка користується терміном «трикутник» перш за все в розумінні трикутником матеріальної фігури.

1. Трикутник, як фігура.

Розглядатимемо трикутник в просторі R^3. Його зображаємо трьома з'єднаними відповідно точками, $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$.

1.1. Мінімальне подання трикутника при автоматичній з'єднаності вершин відрізками є множина

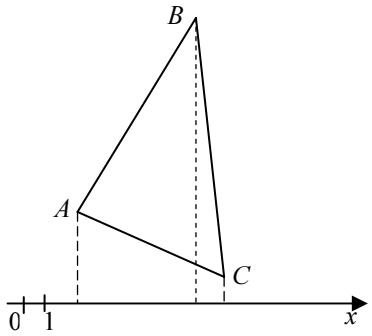
$$\{(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)\}.$$

Таке подання трикутника є зручним для комп'ютéрії, і його називатимемо табличним заданням трикутника.

1.2. Параметричне задання трикутника будуємо на підґрунті параметричного рівняння прямої лінії і відповідного рівняння відрізку [1] у вигляді

$$\frac{x - x_0}{m_1} = \frac{y - y_0}{m_2} = \frac{z - z_0}{m_3} = t, \quad \alpha \le t \le \beta, \tag{1}$$

де (m_1, m_2, m_3) – напрямний вектор прямої.



Креслюнок 1

Природньо, для відрізків AB, AC, BC точка (x_0, y_0, z_0) не буде співпадаючою, в той час як для кожного з кутів $\angle ABC$, $\angle BAC$, $\angle ACB$ конкретно вона може бути єдиною.

Проміжки $[\alpha, \beta]$ для відрізків AB, AC, BC шляхом перенормування [3] можна звести до єдиного проміжку $[0,1]$, який і вибираємо з питань використовності простору $C[0,1]$ [3]. При цьому перенормуванні необхідно буде замість напрямного вектора (m_1, m_2, m_3) розглядати в кожному конкретному випадку AB, AC, BC відповідний колінеарний вектор (km_1, km_2, km_3).

Звідси, під рівнянням трикутника розуміємо множину

$$\left\{\frac{x - x_1}{m_{11}} = \frac{y - y_1}{m_{12}} = \frac{z - z_1}{m_{13}} = t\right\} \cup \left\{\frac{x - x_2}{m_{21}} = \frac{y - y_2}{m_{22}} = \frac{z - z_2}{m_{23}} = t\right\} \cup$$
$$\cup \left\{\frac{x - x_3}{m_{31}} = \frac{y - y_3}{m_{32}} = \frac{z - z_3}{m_{33}} = t\right\}, \quad t \in [0,1]. \tag{2}$$

Вираз (2) є записом не функції – а відношення [4].

1.3. Нерівність трикутника при табличному заданні його визначається нерівністю

$$\sqrt{(x_{2*} - x_{1*})^2 + (y_{2*} - y_{1*})^2 + (z_{2*} - z_{1*})^2} \le$$
$$\le \sqrt{(x_{3*} - x_{2*})^2 + (y_{3*} - y_{2*})^2 + (z_{3*} - z_{2*})^2} + \sqrt{(x_{3*} - x_{1*})^2 + (y_{3*} - y_{1*})^2 + (z_{3*} - z_{1*})^2}, \tag{3}$$

при переборі в якості точок (x_{1*}, y_{1*}, z_{1*}), (x_{2*}, y_{2*}, z_{2*}), (x_{3*}, y_{3*}, z_{3*}) і всіх вершин трикутника.

При кожному t вираз (2) описує таблично заданий трикутник у випадку впорядкованості в напрямку осі $0x$ вершин A, B, C трикутника.

Доведення. Під впорядкованістю точок A, B, C вершин трикутника будемо розуміти згідно кресл.1 прямопаралельність векторів $(m_{11}, m_{12}, m_{13}) \| \overline{AB}$, $(m_{21}, m_{22}, m_{23}) \| \overline{AC}$, $(m_{31}, m_{32}, m_{33}) \| \overline{BC}$, тобто присутність гострих кутів між напрямними векторами відрізків AB, AC, BC і віссю $0x$ у випадку гострокутності ΔABC. Одноразовість відраховування t по всіх сторонах трикутника весь час формує три точки, що не лежать на одній прямій, тобто безліч трикутників, границею послідовності яких, формованого на базі множини $\{t_1, t_2, ..., t_n, ...\}$, $t_k < t_{k+1}$, – є розгляданий трикутник ABC. Для тупокутного ΔABC – аналогічно.

2. Внутрішність трикутника.

В випадку розміщення трикутника ABC в площині (напр., $x0y$) кожну пару прямих AB, BC, AC можна розглядати як вироджену лінію другого порядку.
Опис цього можна знайти в [1].

Природньо, під внутрішністю трикутника розуміємо тільки випуклу множину.

Література

1. Ефимов Н.В., Розендорн Э.Р. Линейная алгебра и многомерная геометрия. – М.: Наука, 1974. – 544 с.
2. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1970. – 720 с.
3. Функциональный анализ. Под ред С.Г. Крейна. – М.: Наука, 1972. –544 с.
4. Шварц Л. Анализ. В 2-х т. Т.1. – М.: Мир, 1972. – 824 с.

Т-во ім. Ст.Банаха
Надійшла 22.01.2009 р.

Короткі повідомлення

УДК 546+530

О.С. Гаврилів

ДО ПОБУДОВИ КВАДРАТУ МОДУЛЯ ХВИЛЬОВОЇ ФУНКЦІЇ МОЛЕКУЛЯРНОЇ ОРБІТАЛІ ПРИ НЕЗАЛЕЖНОСТІ ВИПАДКОВИХ КООРДИНАТНИХ ЗМІН

Будемо розглядати хвильову функцію частинки $\Psi(x,y,z,t)$. Враховуємо, що $|\Psi(x,y,z,t)|^2$ є густиною ймовірності [1, 2], що відповідає випадковому процесу, – і відповідна просторова функція розподілу

$$F(x,y,z,t)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{z}|\psi(x,y,z,t)|^2\,dx\,dy\,dz\,. \tag{1}$$

Згідно означення, $F(x,y,z,t)=F(X(t)<x,Y(t)<y,Z(t)<z)$, і при незалежності випадкових процесів $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$ маємо

$$F(x,y,z,t)=F_t(x)\cdot F_t(y)\cdot F_t(z)=\int_{-\infty}^{x}|\Psi_x(x,t)|^2\,dx\int_{-\infty}^{y}|\Psi_y(y,t)|^2\,dy\int_{-\infty}^{z}|\Psi_z(z,t)|^2\,dz \tag{2}$$

в силу [2], де $|\Psi_x(x,t)|^2$, $|\Psi_y(y,t)|^2$ $|\Psi_z(z,t)|^2$ відповідають хвильовим покоординатним функціям частинки за незалежності випадкових процесів $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$, $|\Psi(x,y,z,t)|^2=|\Psi_x(x,t)|^2\cdot|\Psi_y(y,t)|^2\cdot|\Psi_z(z,t)|^2$.

Виходимо з необхідності додавати хвильові функції електронних орбіталей взаємодіючих атомів у молекулі [3], щоб одержати хвильову функцію Ψ_0 молекулярної орбіталі. Безсумнівним у цьому випадку, що берем в основу, є додавання ймовірностей, яке можна реалізувати нескладно через функції розподілу [4].

Будемо сумувати n хвильових функцій орбіталей атомів, використовуючи незалежність $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$. Одержимо

$$\begin{gathered}F(x,y,z,t)=P(\xi_1(\omega,t)+\xi_2(\omega,t)+\ldots+\xi_n(\omega,t)<x)\times\\ \times P(\mu_1(\omega,t)+\eta_2(\omega,t)+\ldots+\eta_n(\omega,t)<y)\times P(\zeta_1(\omega,t)+\zeta_2(\omega,t)+\ldots+\zeta_n(\omega,t)<z),\end{gathered} \tag{3}$$

де $(\xi_k(\omega,t),\eta_k(\omega,t),\zeta_k(\omega,t))$, $k=\overline{1,n}$ відповідає хвильовій функції орбіталі k-того атома.

Оскільки означено

$$F_t(x)=\int_{-\infty}^{x}|\Psi_x(x,t)|^2\,dx\,,\ F_t(y)=\int_{-\infty}^{y}|\Psi_y(y,t)|^2\,dy\,,\ F_t(z)=\int_{-\infty}^{z}|\Psi_z(z,t)|^2\,dz\,, \tag{4}$$

то, на основі (4) маємо

$$\begin{aligned}F(x,y,z,t)=&\Big[F_{t_{\xi_1}}(x)+F_{t_{\xi_2}}(x)+\ldots+F_{t_{\xi_n}}(x)-F_{t_{\xi_1}}(x)\cdot F_{t_{\xi_2}}(x)-F_{t_{\xi_1}}(x)\cdot F_{t_{\xi_3}}(x)-\ldots-F_{t_{\xi n-1}}(x)\cdot F_{t_{\xi_n}}(x)+\ldots+\\&+(-1)^{n-1}F_{t_{\xi_1}}(x)\cdot F_{t_{\xi_2}}(x)\cdot\ldots\cdot F_{t_{\xi_n}}(x)\Big]\cdot\Big[F_{t_{\eta_1}}(y)+F_{t_{\eta_2}}(y)+\ldots+F_{t_{\eta_n}}(y)-F_{t_{\eta_1}}(y)\cdot F_{t_{\eta_2}}(y)-F_{t_{\eta_1}}(y)\cdot F_{t_{\eta_3}}(y)-\ldots-\\&-F_{t_{\eta n-1}}(y)\cdot F_{t_{\eta n}}(y)+\ldots+(-1)^{n-1}F_{t_{\eta_1}}(x)\cdot F_{t_{\eta_2}}(x)\cdot\ldots\cdot F_{t_{\eta_n}}(x)\Big]\cdot\Big[F_{t_\zeta}(z)+F_{t_{\zeta_2}}(z)+\ldots+F_{t_{\zeta_n}}(z)-F_{t_{\zeta_1}}(z)\cdot F_{t_{\zeta_2}}(z)-\\&-F_{t_{\zeta_1}}(z)\cdot F_{t_{\zeta_3}}(z)-\ldots-F_{t_{\zeta n-1}}(z)\cdot F_{t_{\zeta_n}}(z)+\ldots+(-1)^{n-1}F_{t_{\zeta_1}}(z)\cdot F_{t_{\zeta_2}}(z)\cdot\ldots\cdot F_{t_{\zeta_n}}(z)\Big],\end{aligned}$$

де $F_{t_{\xi_k}}(x)$ – функція розподілу випадкового процесу $\xi_k(\omega,t)$, $k=\overline{1,n}$; $F_{t_{\eta_k}}(y)$ – функція розподілу випадкового процесу $\eta_k(\omega,t)$, $k=\overline{1,n}$; $F_{t_{\zeta_k}}(z)$ – функція розподілу випадкового процесу $\zeta_k(\omega,t)$, $k=\overline{1,n}$.

Шляхом диференціювання та алгебричних перетворень можна від $F(x,y,z,t)$ перейти до хвильової функції, що відповідає молекулярній орбіталі.

Природньо, суттєвим є з'ясування типажу випадкових процесів $\xi_k(\omega,t)$, $\eta_k(\omega,t)$, $\zeta_k(\omega,t)$, $k=\overline{1,n}$.

Література

1. Яворский Б.М., Детлаф А.А. Справочник по физике. – М.: Наука, 1971. – 940 с.

2. Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Наука, 1875. – 640 с.

3. Глинка Н.Л. Общая химия. – Л.: Химия, 1980. – 720 с.

4. Гаврилів О.С. До конструкції міри в R^n // Гріш і математика, 2012. – № 12. – С. 3-4.

Т-во ім. Ст.Банаха
Надійшла 09.02.2009 р.

УДК 517.2

О.С. Крук

ДО ЗАПИСУ НУЛЬОВОГО КОНУСА КВАДРАТИЧНОЇ ФОРМИ В ГІЛЬБЕРТОВОМУ ПРОСТОРІ

Під нульовим конусом квадратичної форми $f(x)$ в афінному просторі S будемо [1] розуміти множину точок, в яких $f(x)=0$.

Під квадратичною формою $f(x)$ в афінному просторі розуміємо [1]

$$f(x)=a(x,x),$$

де $a(x,y)$ є білінійна форма [3].

Природньо, під конусом розуміємо замкнуту систему [2].

Вважаємо, що питання нульового конусу квадратичної форми $f(x)$ в евклідовому просторі, побудованому на базі афінного простору S, є вирішеним [1].

Розглянемо гільбертів простір H зі скалярним добутком $\langle\cdot,\cdot\rangle$, для якого природньо $\forall x\in H \quad \forall y\in H$ виконується $\langle x,y\rangle<\infty$.

Нехай P_n – ортогональний проектор H в скінченновимірний евклідів простір P_nH розмірності n.

Тут H дійсний гільбертів простір. H також вважаємо побудованим на базі афінного простору S^*, де $S\subset S^*$ і P_nH побудований на базі афінного простору S.

Можливими є ситуації:

1. Розглядати квадратичну форму $f(x)$, задану в гільбертовому просторі H. Найпростішою білінійною формою в H є скалярний добуток $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

В цьому випадку під нульовим конусом квадратичної форми $f(x)$ тривіального типу будемо вважати множину точок, в яких $f(P_nx)=0$, $x\in H$.

2. Розглядати квадратичну форму $f_n(x)$, задану в скінченновимірному евклідовому просторі P_nH.

В цьому випадку під нульовим конусом квадратичної форми $f_n(z)$, $z\in P_nH$ в гільбертовому просторі H тривіального типу будемо вважати множину точок $x\in H$, в яких

$$f_n(P_nx)=0.$$

В багатьох випадках ситуації 1 і 2 співпадають кінцево. Тим не менше дуже простим є визначення рангу білінійної форми $a_n(x,y)$ в P_nH.

Нульовий конус квадратичної форми в дійсному гільбертовому просторі H можна розглядати відносно довільної квадратичної форми $f(x)$, $x\in H$ чи квадратичної форми $f_n(z)$, $z\in P_nH$.

Множина ортопроекторів $\{P_n\}$, $P_n=P_n^2$ може бути сформована так, щоб послідовність ортопроекторів P_n при $n\to\infty$ сильно збігалась до тотожнього оператора в гільбертовому просторі H. При цьому, для такої послідовності ортопроекторів виконується, що $P_{n-1}P_n=P_{n-1}$.

Література

1. Ефимов Н.В., Розендорн Э.Р. Линейная алгебра и многомерная геометрия. – М.: Наука, 1974. – 544 с.
2. Функциональный анализ. Под ред С.Г. Крейна. – М.: Наука, 1972. –544 с.
3. Ленг С. Алгебра. – М.: Мир, 1968. – 564 с.

Т-во ім. Ст.Банаха
Надійшла 06.02.2009 р.

УДК 530

О.С. Гаврилів

КУТОВА ШВИДКІСТЬ СВІТЛА В ВАКУУМІ

Розглядатимемо еліпсовидне джерело світла. Природньо, частковою формою еліпса є куля.

Нехай цьому джерелу світла притаманним є обертальний рух відносно осі AB з кутовою швидкістю $\overline{\omega}$.

Корпускулярність фотона подиктовує необхідність експериментів по відшуканню маси спокою фотона, без якої малозрозумілою є корпускулярність фотона. Завдяки виявленню маси спокою фотона цілком нефантастичними стають космічні паруси і поняття сонячного вітру.

Фотони в стані корпускул з масою спокою при вильоті з описаного джерела світла необхідно мають кутову швидкість $\overline{\omega}$ і лінійну швидкість польоту в вакуумі c. Звідси згідно формули Ейлера

$$\overline{c}=\overline{\omega}\times\overline{r}, \qquad (1)$$

де $\bar{r}$ – радіус-вектор, проведений в точку M вильоту фотона-корпускули з масою спокою з довільної точки 0 осі обертання AB. Маємо

$$\bar{c} = 300000\,км/сек = |\bar{\omega}| \times |\bar{r}| \sin\left(\widehat{\bar{\omega}, \bar{r}}\right), \tag{2}$$

звідки

$$|\bar{\omega}| = \frac{300000\,км/сек}{|\bar{r}| \sin\left(\widehat{\bar{\omega}, \bar{r}}\right)}, \tag{3}$$

тобто при $|\bar{r}| = 1$ одержуємо точно величину кутової швидкості $|\bar{\omega}| > 300000\,км/сек$.

Література

1. Эйнштейн А. Физика и реальность. – М.: Наука, 1965. – 360 с.
2. Яворский Б.М., Детлаф А.А. Справочник по физике. – М.: Наука, 1971. – 940 с.

Т-во ім. Ст.Банаха
Надійшла 22.10.2014 р.

Правила для авторів

Обов'язкова вимога до авторів: максимальна детальність, а навіть – дріб'язковість викладу матеріалу.

Розрахунок подачі матеріалу – на найбільш несприймаючого.

Матеріал подається в Редакцію в двох примірниках статті, реалізованої комп'ютерним роздруком, з підписаними обидвома примірниками та на дискеті в WORD-6.

Разом з роботою висилається експертний висновок (для наукових та науково-методичних статей) щодо права подачі матеріалу в відкритому друці українською, російською чи білоруською мовами та Рецензія (для методичних публікацій – методичного семінару, для науково-методичних публікацій – наукового семінару, для наукових публікацій – наукового семінару) українською, російською чи білоруською мовами – завірена належним чином. На наукових статтях проставляється УДК.

За присутності негативних інтонацій чи більшого об'єму негативних суджень в Рецензії Рецензія публікується в розділі "Роздуми для дискусії".

Всі дискутивні матеріали друкуються в інших числах чисопису.

Статті та дискутивні матеріали присилаються та оприлюднюються українською мовою. За неможливості перекласти статтю з російської, білоруської чи іншої мови на українську на місці присилається текст, який буде перекладено в рамках послуг редакції на комерційних засадах з розрахунку 5 доларів/сторінка (Редакція прохає звернути увагу на неможливість віднайдення у Львові перекладачів з усіх мов світу).

Правлення статей; політичні, ідеологічні, віросповідні сентенції; посвяти політикам не допускаються.

До статті в 2-х примірниках, дискети з матеріалом, експертного висновку, Рецензії семінару долучається Довідка про авторів (прізвище, ім'я, батьківство, місце роботи, посада, науковий ступінь, головні публікації, домашня адреса, телефон), яка буде оприлюднюватися в розділі "Наше "хто є хто"".

Кожному автору безплатно висилається ксерокс публікації, при замовленні журналу передоплатою (20 грн. та вартість пересилання зі Львова поштою) – висилається відповідне число примірників журналу.

Статті оформляються згідно решти вимог "Українського математичного журналу".

РЕДКОЛЕГІЯ

Відповідальний секретар О.С. Гаврилів
Головний редактор О.С. Столярчук
Шеф–редактор І.С. Крук

Адреса для листування

Гаврилів Орест Степанович, вул. Ів. Франка 10;
с. Зимна Вода
Пустомитівського району
Львівської області
Україна
81110

ЗМІСТ

1. Гаврилів О.С. До зв'язку теорії множин з комбінаторикою…….. 3
2. Сухорольський М.А. Про базис у просторі функцій, аналітичних у однозв'язній області……..... 4
3. Гаврилів О.С. До алгоритму побудови розв'язків деяких неоднорідних диференціальних рівнянь в часткових похідних……..……... 9
4. Новіков Л.О., Заярнюк П.М. Аплікативна алгебра матриць довільної форми…… 11
5. Чабан В.Й. Дві нові теореми диференціального числення……. 14
Методика……..... 17
6. Столярчук О.С. До рівняння трикутника…….. 17
Короткі повідомлення…… 19
7. Гаврилів О.С. До побудови квадрату модуля хвильової функції молекулярної орбіталі при незалежності випадкових координатних змін……..…… 19
8. Крук О.С. До запису нульового конуса квадратичної форми в гільбертовому просторі…… 20
9. Гаврилів О.С. Кутова швидкість світла в вакуумі……... 20
Правила для авторів…… 22